OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M1

1.	**Din oficiu**	**1p**
	În cazurile a=0 şi a<0 limita este infinită	**2p**
	Se impune a>0	**1p**
	Amplificând cu conjugata avem $\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{\left(a^2-1\right)n^2-bn-c}{an+\sqrt{n^2+bn+c}}$ şi rezultă $a=1,\ b=0,\ c$ arbitrar	**6p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Observăm că $x_1, x_5, ..., x_{4k+1}, ..., x_{2013}, ...$ determină o progresie aritmetică de raţie 4. Deci $x_{2013}=x_1+\dfrac{2013-1}{4}\cdot r=2+\dfrac{2013-1}{4}\cdot 4=2+2012=2014$	**4p**
b.)	Şirul dat este format din 4 subşiruri fiecare de raţia 4. Fie $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un astfel de subşir şi vom avea: $a_n=2013$ $a_1+\left(n-1\right)r=2013$, $r=4$, $a_1\in\{2,4,1,3\}$ $n=\dfrac{2013-a_1}{4}+1$ $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(2013-a_1\right)\vdots 4\Rightarrow a_1=1=x_3$ $\Rightarrow n=504$ adică 2013 este termen al subşirului $x_3, x_7, ..., x_{4k+3}, ...$deci termen al șirul dat și $x_{2015}=2013$	**5p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$\det\left(X^2\right)=\det\left(A\right)\quad ; A=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\left(\det X\right)^2=\begin{vmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{vmatrix}=1\Rightarrow\det X=\pm 1$	**1p**
	Aplicăm relaţia lui Cayley – Hamilton: $X^2-tr\left(X\right)\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2\Rightarrow \underbrace{tr\left(X\right)}_{=t}\cdot X=X^2+\det X\cdot I_2$	**1p**
	Avem două cazuri: Caz i. $\det X=1$ $t\cdot X=X^2+I_2\Rightarrow t\cdot X=\begin{pmatrix}2013 & 1\\ 2012 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow t\cdot X=\begin{pmatrix}2014 & 1\\ 2012 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$ $\Rightarrow tr\left(t\cdot X\right)=tr\begin{pmatrix}2014 & 1\\ 2012 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow t^2=2016\Rightarrow t=\pm\sqrt{2016}\Rightarrow X=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2016}}\begin{pmatrix}2014 & 1\\ 2012 & 2\end{pmatrix}\ \left(2p\right)$	**2p**

	Caz ii. $\det X = -1$ $t\cdot X = X^2 - I_2 \Rightarrow t\cdot X = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2012 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t\cdot X = \begin{pmatrix} 2012 & 1 \\ 2012 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow tr(t\cdot X) = tr\begin{pmatrix} 2012 & 1 \\ 2012 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t^2 = 2012 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2012} \Rightarrow X = \pm\frac{1}{\sqrt{2012}}\begin{pmatrix} 2012 & 1 \\ 2012 & 0 \end{pmatrix}$ $(2p)$	**2p**
b.)	Observăm că soluţiile sunt opuse două câte două. Fie $X_1 = -X_2$ şi $X_3 = -X_4$ $(1p)$ $X_1^{2013} + X_2^{2013} + X_3^{2013} + X_4^{2013} = (-X_2)^{2013} + X_2^{2013} + (-X_4)^{2013} + X_4^{2013} =$ $-X_2^{2013} + X_2^{2013} - X_4^{2013} + X_4^{2013} = O_2$	**3p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Evident dacă A∈ $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, atunci şi A^* are elementele numere întregi. Pe de altă parte A∈M ⇒ $(\det A)^3 = \det A$ şi $\det A \neq 0 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow (\det A) = \pm 1$ Astfel $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^* = \pm A^* \in \mathcal{M}_3(Z)$	**2p**
	Înmulţind la dreapta şi la stânga egalitatea $A^3 = A$ cu A^{-1}obţinem $A^2 = I_3$. Astfel $A^{-1} = A$, însă $A^{-1} = \pm A^*$ deci rezultă că $A^* = \pm A \in M$.	**2p**
b.)	Evident O_3, I_3,$-I_3$ ∈M	**1p**
	Aplicând teorema Cayley-Hamilton şi folosind relaţia $A^3 - A = O_3$ obţinem matricea $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$	**1p**
c.)	Observăm că $(A - I_3)\cdot(A^2 + A + 2\cdot I_3) = 2\cdot(A - I_3)$, deoarece A∈M. Rezultă că $\det(A - I_3)\cdot\det(A^2 + A + 2\cdot I_3) = \det[2\cdot(A - I_3)] = 2^3\cdot\det(A - I_3)$	**2p**
	$\det(A - I_3) \neq 0$ implică $\det(A^2 + A + 2\cdot I_3) = 2^3 = 8$	**1p**